

Bài 1 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = u_2 = 0$ và

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(u_n + u_{n-1}^2 + \frac{5}{9} \right), \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (4 điểm). Cho tam giác ABC và M là điểm trên cạnh AB , đường trung trực của các đoạn thẳng MA , MB cắt các cạnh AC , BC lần lượt tại X , Y . Gọi K và L lần lượt là trung điểm của AY , BX và O là điểm nằm trên đường trung trực của AB . Gọi O_1 và O_2 lần lượt là các điểm đối xứng với O qua K và L . Chứng minh rằng bốn điểm X , Y , O_1 và O_2 cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + y) = yf(x) + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4 (4 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q sao cho $p^2 \cdot q^2 + 3$ chia hết cho $(p-1)(q-1)$.

Bài 5 (4 điểm). Cho 11 chiếc đĩa màu xanh được đánh số từ 1 đến 11 và 11 chiếc đĩa màu đỏ được đánh số từ 1 đến 11. Xếp 22 chiếc đĩa đã cho thành một chồng đĩa thỏa những điều kiện sau

- hai chiếc đĩa cùng màu bất kì thì chiếc đĩa xếp thấp hơn được đánh số nhỏ hơn;
- hai chiếc đĩa xếp kề nhau mà khác màu thì trị tuyệt đối hiệu của hai số trên hai đĩa không lớn hơn 1.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 22 chiếc đĩa đã cho thỏa yêu cầu bài toán?

HẾT