

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)**

**Câu 1 (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$  (1),  $m$  là tham số thực.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi  $m = 1$ .
- b) Tìm  $m$  để hàm số (1) có hai điểm cực trị  $x_1$  và  $x_2$  sao cho  $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ .

**Câu 2 (1,0 điểm).** Giải phương trình  $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$ .

**Câu 3 (1,0 điểm).** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

**Câu 4 (1,0 điểm).** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông, tam giác  $A'AC$  vuông cân,  $A'C = a$ . Tính thể tích của khối tứ diện  $ABB'C'$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCD')$  theo  $a$ .

**Câu 6 (1,0 điểm).** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$ .

**II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)**

**A. Theo chương trình Chuẩn**

**Câu 7.a (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Các đường thẳng  $AC$  và  $AD$  lần lượt có phương trình là  $x + 3y = 0$  và  $x - y + 4 = 0$ ; đường thẳng  $BD$  đi qua điểm  $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ .

Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật  $ABCD$ .

**Câu 8.a (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$  và điểm  $I(2; 1; 3)$ . Viết phương trình mặt cầu tâm  $I$  và cắt  $(P)$  theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

**Câu 9.a (1,0 điểm).** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$ . Tìm môđun của số phức  $w = z + 1 + i$ .

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**Câu 7.b (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - y + 3 = 0$ . Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc  $d$ , cắt trục  $Ox$  tại  $A$  và  $B$ , cắt trục  $Oy$  tại  $C$  và  $D$  sao cho  $AB = CD = 2$ .

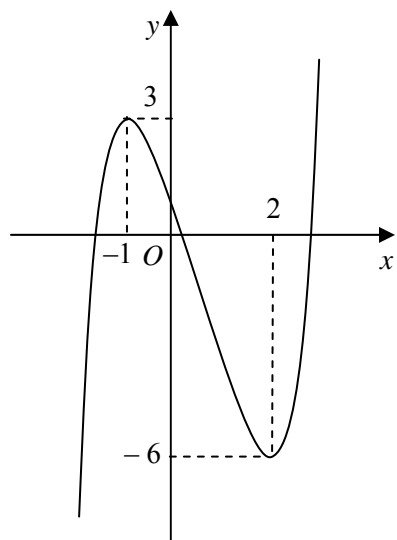
**Câu 8.b (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{1}$  và hai điểm  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(2; -1; 0)$ . Xác định tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho tam giác  $AMB$  vuông tại  $M$ .

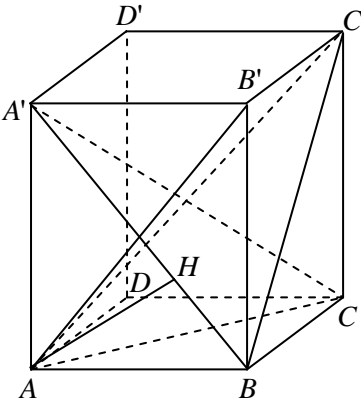
**Câu 9.b (1,0 điểm).** Giải phương trình  $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$  trên tập hợp các số phức.

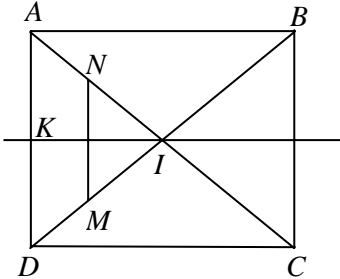
----- HẾT -----

**Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.**

Họ và tên thí sinh: .....; Số báo danh: .....

Câu	Đáp án	Điểm															
<p><b>1</b> (2,0 điểm)</p>	<p><b>a) (1,0 điểm)</b></p>																
	<p>Khi <math>m = 1</math>, hàm số trở thành <math>y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tập xác định: <math>D = \mathbb{R}</math>.</li> <li>• Sự biến thiên:                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Chiều biến thiên: <math>y' = 2x^2 - 2x - 4; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1</math> hoặc <math>x = 2</math>.</li> </ul> </li> </ul>	0,25															
	<p>Các khoảng đồng biến: <math>(-\infty; -1)</math> và <math>(2; +\infty)</math>; khoảng nghịch biến <math>(-1; 2)</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại <math>x = -1, y_{CD} = 3</math>, đạt cực tiểu tại <math>x = 2, y_{CT} = -6</math>.</li> <li>- Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty</math>,</li> </ul>	0,25															
	<p>- Bảng biến thiên:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>2</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y'</math></td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;">↗ 3</td> <td style="padding: 5px;">↘ -6</td> <td style="padding: 5px;">↗ <math>+\infty</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	$y'$	+	0	-	0	$y$	$-\infty$	↗ 3	↘ -6	↗ $+\infty$	0,25
	$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$												
$y'$	+	0	-	0													
$y$	$-\infty$	↗ 3	↘ -6	↗ $+\infty$													
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Đồ thị:</li> </ul> 	0,25																
	<p><b>b) (1,0 điểm)</b></p>																
	<p>Ta có <math>y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)</math>.</p>	0,25															
	<p>Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình <math>y' = 0</math> có hai nghiệm phân biệt</p> $\Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ hoặc } m < -\frac{2\sqrt{13}}{13}$	0,25															
	<p>Ta có: <math>x_1 + x_2 = m</math> và <math>x_1x_2 = 1 - 3m^2</math>, do đó <math>x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1</math></p>	0,25															
	<p><math>\Leftrightarrow m = 0</math> hoặc <math>m = \frac{2}{3}</math>. Kiểm tra điều kiện ta được <math>m = \frac{2}{3}</math>.</p>	0,25															

Câu	Đáp án	Điểm	
2 (1,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương với: $(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2})\cos 2x = 0$ .	0,25	
	• $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .	0,25	
	• $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$	0,25	
	$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ . Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,25	
3 (1,0 điểm)	Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ (2x - y + 1)(x^2 - y) = 0 & (2) \end{cases}$	0,25	
	• $2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$ . Thay vào (1) ta được $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .	0,25	
	Do đó ta được các nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right)$ và $(x; y) = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$ .	0,25	
	• $x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$ . Thay vào (1) ta được $x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$ . Do đó ta được nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ . Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là: $(x; y) = (1; 1), (x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right), (x; y) = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)$	0,25	
4 (1,0 điểm)	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{32} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$	0,25	
	Đặt $u = x; dv = \sin 2x dx$ , suy ra $du = dx; v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ .	0,25	
	Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$	0,25	
	$= \frac{1}{4} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$ . Do đó $I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$ .	0,25	
5 (1,0 điểm)		Tam giác $A'AC$ vuông cân tại $A$ và $A'C = a$ nên $A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Do đó $AB = B'C' = \frac{a}{2}$ .	0,25
		$V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} B'C' \cdot S_{\Delta ABB'} = \frac{1}{6} B'C' \cdot AB \cdot BB' = \frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$	0,25
		Gọi $H$ là chân đường cao kẻ từ $A$ của $\Delta A'AB$ . Ta có $AH \perp A'B$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (A'BC)$ , nghĩa là $AH \perp (BCD')$ . Do đó $AH = d(A, (BCD'))$ .	0,25
		Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2}$ Do đó $d(A, (BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .	0,25

Câu	Đáp án	Điểm	
<b>6</b> (1,0 điểm)	Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$ .	<b>0,25</b>	
	$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$ .		
	Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0; 8]$ .	<b>0,25</b>	
	Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$ , $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại).		
	Ta có $f(0) = 6$ , $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ , $f(8) = 398$ . Suy ra $A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ .	<b>0,25</b>	
	Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ .	<b>0,25</b>	
<b>7.a</b> (1,0 điểm)		Tọa độ điểm $A$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3;1)$ .	<b>0,25</b>
	Gọi $N$ là điểm thuộc $AC$ sao cho $MN \parallel AD$ . Suy ra $MN$ có phương trình là $x-y+\frac{4}{3}=0$ . Vì $N$ thuộc $AC$ , nên tọa độ của điểm $N$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+\frac{4}{3}=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow N\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ .	<b>0,25</b>	
	Đường trung trực $\Delta$ của $MN$ đi qua trung điểm của $MN$ và vuông góc với $AD$ , nên có phương trình là $x+y=0$ . Gọi $I$ và $K$ lần lượt là giao điểm của $\Delta$ với $AC$ và $AD$ .		
	Suy ra tọa độ của điểm $I$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y=0, \end{cases}$	<b>0,25</b>	
	và tọa độ của điểm $K$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0. \end{cases}$		
	Do đó $I(0; 0)$ và $K(-2;2)$ . $\overline{AC} = 2\overline{AI} \Rightarrow C(3;-1)$ ; $\overline{AD} = 2\overline{AK} \Rightarrow D(-1;3)$ ; $\overline{BC} = \overline{AD} \Rightarrow B(1;-3)$ .	<b>0,25</b>	
<b>8.a</b> (1,0 điểm)	Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$ . Suy ra $H$ là tâm của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ cần viết phương trình.	<b>0,25</b>	
	Ta có $IH = d(I; (P)) = 3$ .	<b>0,25</b>	
	Bán kính của mặt cầu $(S)$ là: $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .	<b>0,25</b>	
	Phương trình của mặt cầu $(S)$ là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ .	<b>0,25</b>	
<b>9.a</b> (1,0 điểm)	Ta có: $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z = 4+7i$	<b>0,25</b>	
	$\Leftrightarrow z = 3+2i$ .	<b>0,25</b>	
	Do đó $w = 4+3i$ .	<b>0,25</b>	
	Môđun của $w$ là $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .	<b>0,25</b>	

<b>Câu</b>	<b>Đáp án</b>	<b>Điểm</b>
<b>7.b</b> <b>(1,0 điểm)</b>	Gọi $I$ là tâm của đường tròn $(C)$ cần viết phương trình. Do $I \in d$ nên tọa độ của $I$ có dạng $I(t; 2t+3)$ .	<b>0,25</b>
	$AB = CD \Leftrightarrow d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow  t  =  2t+3  \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = -3$ .	<b>0,25</b>
	• Với $t = -1$ ta được $I(-1; 1)$ , nên $d(I; Ox) = 1$ . Suy ra, bán kính của $(C)$ là $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Do đó $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ .	<b>0,25</b>
	• Với $t = -3$ ta được $I(-3; -3)$ , nên $d(I; Ox) = 3$ . Suy ra, bán kính của $(C)$ là $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ . Do đó $(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$ .	<b>0,25</b>
<b>8.b</b> <b>(1,0 điểm)</b>	Do $M \in d$ nên tọa độ của điểm $M$ có dạng $M(1+2t; -1-t; t)$ .	<b>0,25</b>
	Ta có $\overline{AM} = (2t; -t; t-2), \overline{BM} = (-1+2t; -t; t)$ .	<b>0,25</b>
	Tam giác $AMB$ vuông tại $M \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$ $\Leftrightarrow 2t(-1+2t) + t^2 + t(t-2) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0$	<b>0,25</b>
	$\Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{2}{3}$ . Do đó $M(1; -1; 0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .	<b>0,25</b>
<b>9.b</b> <b>(1,0 điểm)</b>	Phương trình bậc hai $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ có biệt thức $\Delta = -2i$ .	<b>0,25</b>
	$= (1-i)^2$ .	<b>0,25</b>
	Do đó nghiệm của phương trình là $z = \frac{-3(1+i) + (1-i)}{2} = -1 - 2i$	<b>0,25</b>
	hoặc $z = \frac{-3(1+i) - (1-i)}{2} = -2 - i$ .	<b>0,25</b>

----- HẾT -----