[TIPS] Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Oxy)

Bài viết hướng dẫn cách viết phương trình tổng quát của đường thẳng trong hệ tọa độ Oxy thông qua lý thuyết và các ví dụ minh họa có lời giải chi tiết.

Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định:

+ Điểm $A(x_0; y_0) \in \Delta$.

+ Một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}(a; b)$ của Δ.

Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$.

Chú ý:

a. Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là: $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ nhận $\overrightarrow{n}(a; b)$ làm vectơ pháp tuyến.

b. Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì VTPT đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.

c. Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M\,(x_0; y_0)$ có dạng Δ: $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Đặc biệt:

+ Nếu đường thẳng Δ song song với trục $Oy : \Delta : x = x_0$.

+ Nếu đường thẳng Δ cắt trục $Oy : \Delta : y - y_0 = k\,(x - x_0)$.

d. Phương trình đường thẳng đi qua $A\,(a; 0), B\,(0; b)$ với $ab \neq 0$ có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

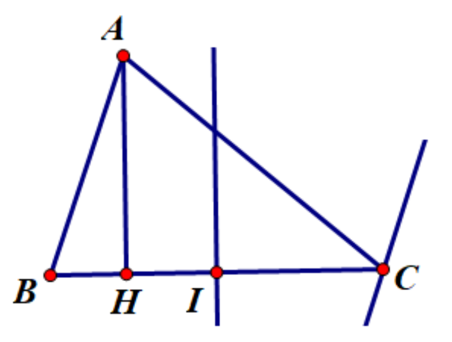
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC biết $A\,(2; 0), B\,(0; 4), C(1; 3)$. Viết phương trình tổng quát của:

a. Đường cao AH.

b. Đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c. Đường thẳng AB.

d. Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB.



a. Vì $AH \perp BC$ nên $\overrightarrow{BC}$ là vectơ pháp tuyến của AH.

Ta có $\overrightarrow{BC}\,(1; -1)$ suy ra đường cao AH đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC}$ là vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $1.\,(x - 2) - 1.\,(y - 0) = 0$ hay $x - y - 2 = 0$.

b. Đường trung trực của đoạn thẳng BC đi qua trung điểm BC và nhận vectơ $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi I là trung điểm BC khi đó $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1}{2}, y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Suy ra phương trình tổng quát của đường trung trực BC là:

$1.\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1.\left(y - \frac{7}{2}\right) = 0$ hay $x - y + 3 = 0$.

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ hay $2x + y - 4 = 0$.

d. Giải bằng 2 cách sau:

Cách 1: Đường thẳng AB có VTPT là $\overrightarrow{n}(2; 1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\overrightarrow{n}(2; 1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là $2.\,(x - 1) + 1.\,(y - 3) = 0$ hay $2x + y - 5 = 0$.

Cách 2: Đường thẳng Δ song song với đường thẳng AB có dạng $2x + y + c = 0$.

Điểm C thuộc Δ suy ra $2.1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d : x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M\,(-1; 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

a. Δ đi qua điểm M và có hệ số góc $k = 3$.

b. Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.

c. Δ đối xứng với đường thẳng d qua M.

a. Đường thẳng Δ có hệ số góc $k = 3$ có phương trình dạng $y = 3x + m$.

Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow 2 = 3.\,(-1) + m \Rightarrow m = 5$.

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = 3x + 5$ hay $3x - y + 5 = 0$.

b. Ta có $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ do đó hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = \frac{1}{2}$.

Vì $\Delta \perp d$ nên hệ số góc của Δ là k_Δ thì $k_d.\,k_\Delta = -1 \Rightarrow k_\Delta = -2$.

Do đó $\Delta : y = -2x + m$, $M \in \Delta \Rightarrow 2 = -2.(-1) + m \Rightarrow m = -2$.

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = -2x - 2$ hay $2x + y + 2 = 0$.

c. Giải bằng 2 cách sau:

Cách 1: Ta có $-1 - 2.2 + 3 \neq 0$ do đó $M \notin d$ vì vậy đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua M sẽ song song với đường thẳng d suy ra đường thẳng Δ có VTPT là $\overrightarrow{n}(1; -2)$.

Ta có $A\,(1; 2) \in d$, gọi A' đối xứng với A qua M khi đó $A' \in \Delta$.

Ta có M là trung điểm của AA'.

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A'\,(-3; 2)$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $1.\,(x + 3) - 2\,(y - 2) = 0$ hay $x - 2y + 7 = 0$.

Cách 2: Gọi $A\,(x_0; y_0)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d, $A'\,(x; y)$ là điểm đối xứng với A qua M.

Khi đó M là trung điểm của AA', suy ra:

$\begin{cases} x_M = \frac{x_0 + x}{2} \\ y_M = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{x_0 + x}{2} \\ 2 = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 - x \\ y_0 = 4 - y \end{cases}$

Ta có $A \in d \Rightarrow x_0 - 2y_0 + 3 = 0$, suy ra:

$(-2 - x) - 2.\,(4 - y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của Δ đối xứng với đường thẳng d qua M là $x - 2y + 7 = 0$.

Ví dụ 3: Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x - y = 0$ và $x + 3y - 8 = 0$, tọa độ một đỉnh của hình bình hành là $(-2; 2)$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Đặt tên hình bình hành là $ABCD$ với $A\,(-2; 2)$, do tọa độ điểm A không là nghiệm của hai phương trình đường thẳng trên nên ta giả sử $BC : x - y = 0, CD : x + 3y - 8 = 0$.

Vì $AB \parallel CD$ nên cạnh AB nhận $\overrightarrow{n_{CD}}\,(1; 3)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1.\,(x + 2) + 3.\,(y - 2) = 0$ hay $x + 3y - 4 = 0$.

Tương tự cạnh AD nhận $\overrightarrow{n_{BC}}\,(1; -1)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1.\,(x + 2) - 1.\,(y - 2) = 0$ hay $x - y + 4 = 0$.

Ví dụ 4: Cho điểm $M\,(1; 4)$. Viết phương trình đường thẳng qua M lần lượt cắt hai tia Ox, tia Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Giả sử $A\,(a; 0), B\,(0; b)$ với $a > 0, b > 0$. Khi đó đường thẳng đi qua A, B có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Do $M \in AB$ nên $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$.

Mặt khác $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.\,OB = \frac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Rightarrow ab \geq 16 \Rightarrow S_{OAB} \geq 8$.

Suy ra S_{OAB} nhỏ nhất khi $\frac{1}{a} = \frac{4}{b}$ và $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ do đó $a = 2; b = 8$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ hay $4x + y - 8 = 0$.