[TIPS] Viết phương trình đường tròn (Oxy)

Bài viết hướng dẫn phương pháp viết phương trình đường tròn trong hệ tọa độ Oxy thông qua việc trình bày các bước giải toán cụ thể kèm theo các ví dụ minh họa có lời giải chi tiết, đây là một nội dung quan trọng trong chương trình Hình học 10 chương 3: phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Để viết phương trình đường tròn (C) trong hệ tọa độ Oxy thỏa mãn các yêu cầu cho trước, ta thường sử dụng 2 phương pháp sau đây:

Phương pháp 1

+ Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C).

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C).

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x–a)^2+(y–b)^2=R^2$.

Phương pháp 2

Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2–2ax–2by+c=0$ (hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a,b,c.

+ Giải hệ để tìm a,b,c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

+ $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$.

+ (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=d(I;\Delta)=R$.

+ (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2)=R$.

Ví dụ 1: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a. Có tâm $I(1;–5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b. Nhận AB làm đường kính với $A(1;1),B(7;5)$.

c. Đi qua ba điểm: $M(–2;4),N(5;5),P(6;–2)$.

a. Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x–1)^2+(y+5)^2=26$.

b. Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4;3)$.

$AI=\sqrt{(4–1)^2+(3–1)^2}=\sqrt{13}$.

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là: $(x–4)^2+(y–3)^2=13$.

c. Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2–2ax–2by+c=0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}4+16+4a–8b+c=0\\25+25–10a–10b+c=0\\36+4–12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=–20\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2–4x–2y–20=0$.

Nhận xét: Đối với ý c ta có thể làm theo cách sau:

Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm.

Vì $IM=IN=IP\Leftrightarrow\begin{cases}IM^2=IN^2\\IM^2=IP^2\end{cases}$ nên ta có hệ:

$(x+2)^2+(y–4)^2=(x–5)^2+(y–5)^2$

$(x+2)^2+(y–4)^2=(x–6)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a. (C) có tâm $I(–1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:x–2y+7=0$.

b. (C) đi qua $A(2;–1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy.

c. (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d:x–6y–10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1:3x+4y+5=0$ và $d_2:4x–3y–5=0$.

a. Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên $R=d(I;\Delta)$ $=\frac{|–1–4–7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(x+1)^2+(y–2)^2=\frac45$.

b. Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;–R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có:

$$R^2=IA^2\Leftrightarrow R^2=(2–R)^2+(–1+R)^2\Leftrightarrow R^2–6R+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=1\\R=5\end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x–1)^2+(y+1)^2=1$ và $(x–5)^2+(y+5)^2=25$.

c. Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$.

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1,d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra:

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)–3a–5|}{5}|\Leftrightarrow 22a+35|=|21a+35|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{–70}{43}\end{array}\right.$$

+ Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x–10)^2+y^2=49$.

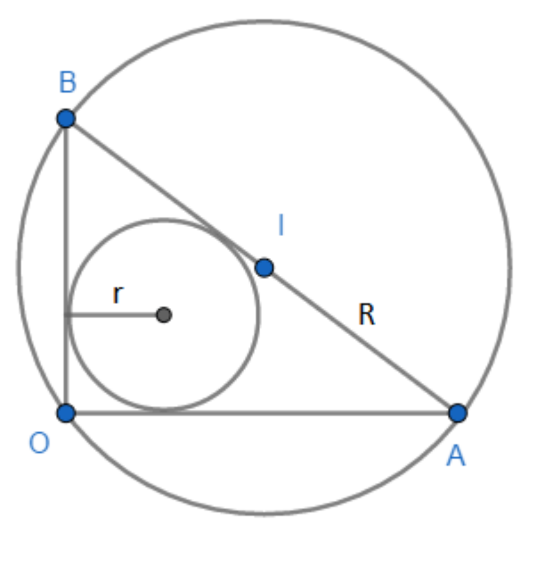
+ Với $a=\frac{–70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43};\frac{–70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra $(C):\left(x–\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là $(C):(x–10)^2+y^2=49$ và $(C):\left(x–\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Ví dụ 3: Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.



a. Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{(8–4)^2+(0–3)^2}=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$(x–4)^2+(y–3)^2=25$.

b. Ta có $OA=8;OB=6$, $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

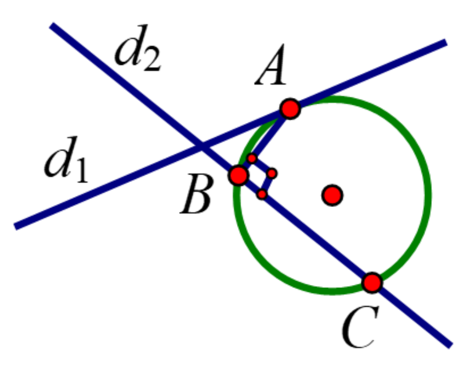
Mặt khác $\frac12OA.OB=pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).

Suy ra $r=\frac{OA.OB}{OA+OB+AB}=2$.

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là: $(x–2)^2+(y–2)^2=4$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt3x+y=0$ và $d_2:\sqrt3x–y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt3}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.



Vì $A\in d_1\Rightarrow A\left(a;–\sqrt3a\right),a>0;B,C\in d_2\Rightarrow B\left(b;\sqrt3b\right),C\left(c;\sqrt3c\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b–a;\sqrt3(a+b)\right),\overrightarrow{AC}\left(c–a;\sqrt3(c+a)\right)$.

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn C.

Do đó $AC\perp d_1\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow–1.(c–a)+\sqrt3.\sqrt3(a+c)=0\Leftrightarrow2a+c=0\ (1)$.

$AB\perp d_2\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow1.(b–a)+3(a+b)=0\Leftrightarrow2b+a=0\ (2)$.

Mặt khác: $S_{ABC}=\frac12d(A;d_2).BC\Rightarrow\frac12.\frac{|2\sqrt3a|}{2}\sqrt{(c–b)^2+3(c–b)^2}=\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow2a|c–b|=1\ (3)$.

Từ (1), (2) suy ra $2(c–b)=–3a$ thế vào (3) ta được:

$a|–3a|=1\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt3}{3}$.

Do đó $b=–\frac{\sqrt3}{6},c=–\frac{2\sqrt3}{3}\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt3}{3};–1\right),C\left(–\frac{2\sqrt3}{3};–2\right)$.

Suy ra (C) nhận $I\left(–\frac{\sqrt3}{6};–\frac32\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là $R=\frac{AC}{2}=1$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(C):\left(x+\frac{\sqrt3}{6}\right)^2+\left(x+\frac32\right)^2=1$.