Tóm tắt lý thuyết cực trị của hàm số

Đội ngũ hdgmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 12 bài viết Tóm tắt lý thuyết cực trị của hàm số, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 12.

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$.

- ✓ Điểm $x_0 \in \mathscr{D}$ được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset \mathscr{D}$ sao cho $x_0 \in (a;b)$ và $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.
- ✓ Điểm $x_1 \in \mathscr{D}$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset \mathscr{D}$ sao cho $x_1 \in (a;b)$ và $f(x_1) < f(x)$, $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.

2 Điều kiện cần và đủ để hàm số có cực trị

Định lí 1 (Điều kiện cần). *Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số có đạo hàm tại x_0, thì $f'(x_0) = 0$.*

Tuy nhiên hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn với hàm $y = |x|$, đại cực trị tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó.

Định lí 2 (Điều kiện đủ). *Ta có*

- ✓ *Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, x_0)$ và $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0; b)$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*
- ✓ *Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, x_0)$ và $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0; b)$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

Tức là, nếu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Ta nói, đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(x_0, y_{\text{CT}})$.

Nếu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_1.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	y_{CD}	$\searrow$	$-\infty$

Ta nói đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M(x_0; y_{\text{CD}})$.

Chú ý: Không cần xét hàm số $y = f(x)$ có hay không đạo hàm tại x_0.

Ví dụ 1. Xét hàm số

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{nếu } x \in (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -1 < 0 & \text{nếu } x \in (-\infty; 0) \\ 1 > 0 & \text{nếu } x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$.

Định lí 3. *Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa x_0 mà $f'(x_0) = 0$ và $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác không tại x_0. Khi đó,*

- ✓ *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*
- ✓ *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

Từ đây, ta có phương pháp tìm cực trị của hàm số.

- ✓ Tính đạo hàm y', tìm những điểm mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- ✓ Xét dấu y' dựa vào định lí 2 để kết luận điểm cực đại, cực tiểu.

  Hoặc xét dấu $y''(x_0)$ (x_0 là nghiệm của y') dựa vào định lí 3 để kết luận.

Chú ý: Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Ta có $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

$y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

Dấu của đạo hàm không phụ thuộc vào x, hay độc lập với x nên hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó. Do đó hàm số luôn không có cực trị.

3 Bài toán cực trị với hàm đa thức bậc ba

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^3 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad (a \neq 0)$.

Số lượng điểm cực trị

Hàm số bậc ba có đạo hàm là một tam thức bậc hai nên

- ☑ Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ có cực đại $\Leftrightarrow$ có cực tiểu $\Leftrightarrow$ có cả cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ có hai cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$.
- ☑ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta \leq 0$.

⚠ ***Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.***

Trong trường hợp hàm số có hai điểm cực trị, ta viết được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị như sau:

- ✓ ***Bước 1:*** *Thực hiện phép chia đa thức: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ được thương là $q(x)$ và phần dư là $r(x) = mx + n$, ta được:*

$$y = y' \cdot q(x) + r(x)$$

- ✓ ***Bước 2:*** *Chứng minh đường thẳng $(d): y = r(x) = mx + n$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.*

Giả sử hai điểm cực trị là $M(x_1; y_1)$, $N(x_2, y_2)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$.

Khi đó, vì M, N thuộc (C) nên

$$y_1 = y'(x_1) \cdot q(x_1) + r(x_1) = r(x_1) \Rightarrow y_1 = mx_1 + n \Rightarrow M \in (d).$$

$$y_2 = y'(x_2) \cdot q(x_2) + r(x_2) = r(x_2) \Rightarrow y_2 = mx_2 + n \Rightarrow N \in (d).$$

Tức là (d) là đường thẳng đi qua hai cực trị.

4 Bài toán cực trị với hàm bậc 4 trùng phương

Cho hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right. .$$

Số lượng điểm cực trị

Hàm số bậc bốn luôn luôn có cực trị

- ☑ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ có cả cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a} > 0$.
- ☑ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a} \leq 0$.

⚠ *Khi hàm số có 3 điểm cực trị $A(0;c)$, $B\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; y_1\right)$, $C\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; y_2\right)$ thì:*

- ☑ *$y_1 = y_2$.*
- ☑ *B và C đối xứng nhau qua trục Oy, điểm A nằm trên trục Oy. Do đó tam giác ABC cân tại A.*