Tóm tắt lý thuyết GTLN và GTNN của hàm số

Đội ngũ hdgmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 12 bài viết Tóm tắt lý thuyết GTLN và GTNN của hàm số, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 12.

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

① Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$ nếu
- i) $\forall x \in \mathscr{D} : f(x) \leq M$;
- ii) $\exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

② Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathscr{D}$ nếu
- i) $\forall x \in \mathscr{D} : f(x) \geq m$;
- ii) $\exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - 5 + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số có giá trị cực tiểu duy nhất, đó cũng là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = -3$ tại $x = 1$. Không có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. □

2 Cách tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Định lí 1. *Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.*

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Nhận xét. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút của đoạn.

Quy tắc Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau:
- Tìm $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $[a; b]$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)$.
- Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Khi đó

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 2. [Cao Thành Thái][2D1B3] Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -2. \end{aligned}\right.$$

Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có: $y(-1) = 15$; $y(1) = -5$; $y(2) = 6$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = 15$ tại $x = -1$ và $\min\limits_{[-1;2]} y = -5$ tại $x = 1$. □

⚠ *Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.*

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; 1)$, ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; 1)$ hàm số không có giá trị lớn nhất, cũng không có giá trị nhỏ nhất. □

Một số phương pháp khác tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$.

① Phương pháp miền giá trị
- Xem $y = f(x)$ là phương trình đối với ẩn số x và y là tham số;
- Tìm điều kiện của y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm;
- Từ điều kiện trên, biến đổi đưa đến dạng $m \leq y \leq M$. Xét dấu "=" xảy ra và kết luận.

② Phương pháp đạo hàm
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$;
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

③ Phương pháp dùng bất đẳng thức
- Dùng các bất đẳng thức quen thuộc để chứng minh $f(x) \leq M$ hoặc $f(x) \geq m$.
- Phải chỉ ra tồn tại $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Khi đó

$$M = \max_{\mathscr{D}} f(x); m = \min_{\mathscr{D}} f(x).$$

3 Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 36x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= \pm 3. \end{aligned}\right.$$

Trên đoạn $[-1; 4]$ ta có: $f(-1) = -15$; $f(3) = -79$; $f(4) = -30$.

Vậy $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = -15$ tại $x = -1$ và $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -79$ tại $x = 3$. □

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 - 3x^4 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^5 - 12x^3 + \dfrac{9}{2}x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^5 - 12x^3 + \frac{9}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(12x^4 - 24x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0 \\ x^2 &= \frac{3}{2} \\ x^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Trên đoạn $[-1; 1]$ ta có: $y(-1) = \dfrac{1}{2}$; $y\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$; $y(0) = \dfrac{1}{4}$; $y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$; $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y = \dfrac{3}{4}$ tại $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\min\limits_{[-1;1]} y = \dfrac{1}{4}$ tại $x = 0$. □

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải.

Với $x \neq 0$ ta có: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ ta có: $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$; $y(1) = 2$; $y(2) = \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y = \dfrac{5}{2}$ tại $x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x = 2$ và $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y = 2$ tại $x = 1$. □

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên đoạn $[-2; 3]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Trên đoạn $[-2; 3]$ ta có: $f(-2) = \sqrt{17}$; $f(2) = 1$; $f(3) = \sqrt{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = \sqrt{17}$ tại $x = -2$ và $\min\limits_{[-2;3]} f(x) = 1$ tại $x = 2$. □

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$. □

Ví dụ 9. Cho bất phương trình $(x+2)(x+4)(x^2+6x+10) \geq m$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = (x+2)(x+4)(x^2+6x+10) = (x^2+6x+8)(x^2+6x+10)$.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = (2x+6)(2x^2+12x+18) = 4(x+3)^3$.

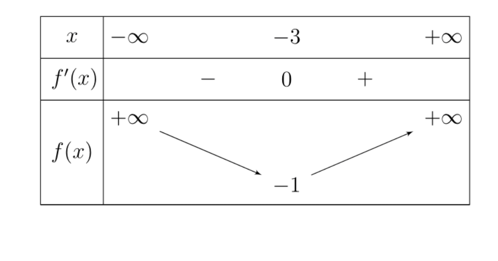
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq -1$. □

Ví dụ 10. Cho một tấm nhôm hình vuông có chu vi là 36 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Khi đó, khối hộp nhận được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải.

Gọi x (cm) là độ dài cạnh hình vuông bị cắt $(0 < x < \dfrac{9}{2})$.

Khi đó, thể tích khối hộp nhận được là $V(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$.

Ta có $V'(x) = 12x^2 - 72x + 81$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	27	$\searrow$	

□