Tìm hệ số không chứa x

Đội ngũ hdgmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 11 bài viết Tìm hệ số không chứa x, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 11.

Dạng 5. Tìm hệ số không chứa x.

Để tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)$, ta tìm số hạng tổng quát trong khai triển. Sau đó, cho số mũ của x bằng 0 để tìm hằng số k, từ đó suy ra số hạng không chứa x.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^6$, với x khác 0.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_6^k(2x)^{6-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_6^k 2^{6-k}(-1)^k x^{6-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_6^2 2^{6-2}(-1)^2 = 240$. □

Ví dụ 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{21}$, với x khác 0.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{21}^k(x)^{21-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{21}^k(-2)^k x^{21-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $21 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{21}^7(-2)^7$. □

Ví dụ 3. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_n^n + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 79.$$

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{C}_n^n + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -13 \\ n = 12 \end{array}\right.$$

Do n là số tự nhiên nên $n = 12$.

Với $n = 12$, số hạng tổng quát trong khai triển là

$$\mathrm{C}_{12}^k(x^2)^{12-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^k(2)^k x^{24-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $24 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{12}^8(2)^8$. □

Ví dụ 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(\dfrac{2}{x} - x^3\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_{n-4}^{n-6} + n.\mathrm{A}_n^2 = 454.$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n - 6 \geq 0 \\ n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow n \geq 6,\ n \in \mathbb{N}.$

Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{n-4}^{n-6} + n.\mathrm{A}_n^2 = 454 &\Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{(n-6)!2!} + n.\frac{n!}{(n-2)!} = 454 \\ &\Leftrightarrow \frac{(n-5)(n-4)}{2} + n(n-1)n = 454 \Leftrightarrow 2n^3 - n^2 - 9n - 888 = 0 \Rightarrow n = 8. \end{aligned}$$

Với $n = 8$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_8^k\left(\frac{2}{x}\right)^{8-k}(-x^3)^k = \mathrm{C}_8^k 2^{8-k}(-1)^k x^{-8+4k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $-8 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_8^2(2)^6$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(2x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^6$ (với x khác 0).

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_6^k(2x^2)^{6-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_6^k 2^{6-k}3^k x^{12-3k}.$$

Ta phải tìm k sao cho $12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_6^4(2)^{6-4}3^4 = 4860$. □

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết $2\mathrm{C}_n^2 = \mathrm{C}_n^3$.

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$2\mathrm{C}_n^2 = \mathrm{C}_n^3 \Leftrightarrow 2.\frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 8.$$

Với $n = 8$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_8^k x^{8-k}(-1)^k x^{-k} = \mathrm{C}_8^k x^{8-2k}(-1)^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_8^4 = 70$. □

Bài 3. Cho khai triển $P(x) = \left(x + \dfrac{1}{3}\right)^n$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển, biết số hạng thứ ba trong khai triển bằng 5.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_n^k x^{n-k}3^{-k}$.

Số hạng thứ ba trong khai triển bằng 5 nên $\dfrac{1}{9}\mathrm{C}_n^2 = 5 \Leftrightarrow n = 9$.

Với $n = 9$, số hạng tổng quát của khai triển là $\mathrm{C}_9^k x^{9-k}3^{-k}$.

Ta tìm k sao cho $9 - k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.

Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_9^9 3^{-9} = \dfrac{1}{19683}$. □

Bài 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8.$$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 9$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^7 + 2\mathrm{C}_{n+1}^8 + \mathrm{C}_{n+1}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{C}_{n+2}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{(n-7)!9!} = \frac{(n+2)!}{(n-6)!8!} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{n-6} \Leftrightarrow n = 15. \end{aligned}$$

Với $n = 15$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{15}^k x^{15-k}2^k x^{-2k} = \mathrm{C}_{15}^k x^{15-3k}2^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $15 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{15}^5(2)^5$. □

Bài 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_{n-1}^2 + \mathrm{C}_{n-1}^3.$$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_{n-1}^2 + \mathrm{C}_{n-1}^3 \Leftrightarrow 2\mathrm{A}_n^2 = \mathrm{C}_n^3 \Leftrightarrow 2.\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n = 14.$$

Với $n = 14$, số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{14}^k(x^2)^{14-k}(-1)^k x^{-2k} = \mathrm{C}_{14}^k x^{28-4k}(-1)^k.$$

Ta phải tìm k sao cho $28 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng cần tìm là $\mathrm{C}_{14}^7(-1)^7 = -3432$. □