

Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai vô nghiệm / có nghiệm / có hai nghiệm phân biệt

Lê Nguyễn Minh Trung - Đội ngũ hdmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 10 bài viết Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai vô nghiệm / có nghiệm / có hai nghiệm phân biệt, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 10.

Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai Vô nghiệm – có nghiệm – có hai nghiệm phân biệt

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **D.** $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$ vô nghiệm?

A. $m < 0$. **B.** $m > 2$. **C.** $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$ (*).

TH1. Với $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó (*) $\Leftrightarrow 2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Suy ra với $m = 2$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Do đó $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. **B.** $-5 \leq m \leq -1$. **C.** $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 + 2m + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 4: Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m-2 = 0$ có nghiệm.

A. $m \neq 5$. **B.** $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. **C.** $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \leq 5 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m-2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$, khi đó (*) $\Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3-2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \neq 1$ **B.** $2 < m < 6$. **C.** $-1 < m < 6$. **D.** $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra với $m = 1$ không thỏa mãn ycbt. Do đó

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có $\begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 4 \cdot 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases}$ suy ra $17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó, hệ bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \neq 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 = 0$.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > 3$. **C.** $-\frac{3}{5} < m < 3$. **D.** $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 4$. **B.** $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. **C.** $0 \leq m \leq 4$. **D.** $0 \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ (*).

TH1. Với $m = 0$, khi đó phương trình (*) $\Leftrightarrow 4 = 0$ (vô lý).

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai TH, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \geq 0$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ (*).

TH1. Với $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

- Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).
- Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \emptyset$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $-1 < m < 3$. **D.** $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow -2.4x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Suy ra với $m = 1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m > 1$. **C.** $-\frac{3}{4} < m < 1$. **D.** $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$, có $\Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}$.

Ta có $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases}$ suy ra $m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. **D.** $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

Câu 8: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân

biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.}$$