# Thể tích khối trụ, bài toán cực trị khối trụ

Đội ngũ hdgmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 12 bài viết Thể tích khối trụ, bài toán cực trị khối trụ,nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 12.

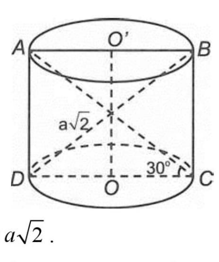
**Dạng 1: Thể tích khối trụ, bài toán cực trị**

**Bài tập 1:** Cắt một khối trụ bởi mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật *ABCD* có cạnh *AB* và cạnh *CD* nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DCA} = 30°$. Tính theo *a* thể tích khối trụ.

**A.** $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn C.**




Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.

Mặt khác xét tam giác *ADC* vuông tại *D,* ta có

$AD = AC.\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và

$CD = AC\cos 30° = \frac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Nên $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2.\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

**Bài tập 2:** Cho hình chữ nhật *ABCD* có *AD* = *3AB.* Gọi $V_1$ là thể tích của khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh *AB,* $V_2$ là thể tích khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh *AD.* Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là.

**A.** 9 **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{9}$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn B.**

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật *ABCD* quay xung quanh cạnh *AB* có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_1 = AD = 3AB; h_1 = AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 9\pi AB^3$.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật *ABCD* quay xung quanh cạnh *AD* có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_2 = AB; h_2 = AD = 3AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 3\pi AB^3$.

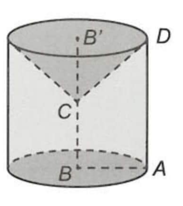
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\pi AB^3}{3\pi AB^3} = 3$.

**Bài tập 3:** Cho hình thang *ABCD* vuông tại *A*và *B* với $AB = BC = \frac{AD}{2}a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh *BC.* Thể tích *V* của khối tròn xoay được tạo thành là

**A.** $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$ **C.** $V = \pi a^3$ **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn B.**




Thể tích $V = V_1 - V_2$. Trong đó $V_1$ là thể tích khối trụ có bán kính đáy là $BA = a$ và chiều cao $AD = 2a; V_2$ là thể tích khối nón có bán kính đáy là $B'D = a$ và chiều cao $CB' = a$

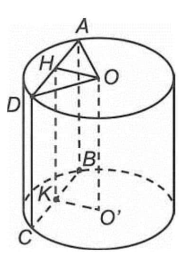
Khi đó $V = V_1 - V_2 = \pi a^2.2a - \frac{1}{3}\pi a^2.a = \frac{5\pi a^3}{3}$.

**Bài tập 4:** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng *a.* cắt hình trụ bởi một mặt phẳng $(P)$ song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ bằng

**A.** $3\pi a^3$ **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\pi a^3$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn B.**




Giả sử hình vuông *ABCD* là thiết diện của hình trụ cắt bởi $(P)$ như hình vẽ.

Gọi *H, K* lần lượt là trung điểm *AD, BC.*

Ta có $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d(O;(P)) = OH \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$.

Do đó $AD = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $OO' = AB = AD = a\sqrt{3}$.

Vậy nên $V = \pi R^2 h = \pi a^2.a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}$.

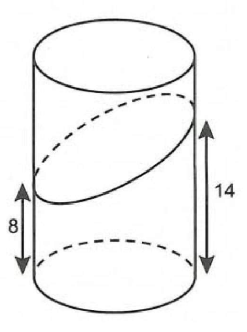
**Bài tập 5:** Cắt một khối trụ cao 18*cm* bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8*cm* và 14*cm*. Tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn) là

**A.** $\frac{2}{11}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{5}{11}$ **D.** $\frac{7}{11}$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn D.**

Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích khối nhỏ và khối lớn.




Ta có thể tích khối trụ là $V = \frac{\pi R^2(8+14)}{2} = 11\pi R^2$

(với *R* là bán kính khối trụ).

Thể tích $V_2 = \frac{\pi R^2(8+14)}{2} = 11\pi R^2$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{18\pi R^2 - 11\pi R^2}{11\pi R^2} = \frac{7}{11}$.

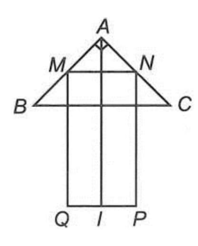
**Bài tập 6:** Cho tam giác vuông cân *ABC* có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật *MNPQ* với *MQ* = *3MN* được xếp chồng lên nhau sao cho *M,N* lần lượt là trung điểm của *AB, AC* (như hình vẽ). Tính thể tích *V* của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục *AI,* với / là trung điểm *PQ.*

**A.** $V = \frac{11\pi a^3}{6}$.

**B.** $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

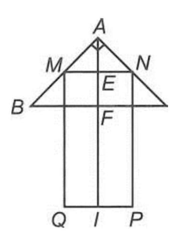
**C.** $V = \frac{11\pi a^3}{8}$.

**D.** $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.




***Hướng dẫn giải***

**Chọn D.**




Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow MN = a, MQ = 2a$.

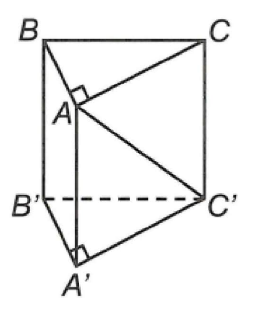
Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm *MN* và *BC.*

$AF = a, EF = \frac{a}{2} \Rightarrow IF = \frac{3}{2}a$

Vậy thể tích cần tìm là tổng thể tích của khối nón có chiều cao là *AF* bán kính đáy *FB* và thể tích khối trụ có chiều cao *IF* bán kính *IQ.*

$V = \frac{1}{3}\pi AF.FB^2 + \pi IF.IQ^2 = \frac{1}{3}\pi.a.a^2 + \pi.\frac{3}{2}a.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17}{24}\pi a^3$.

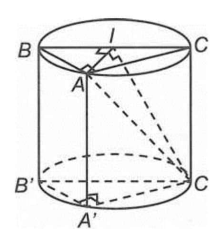
**Bài tập 7:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng *2a,* đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A,* góc giữa *AC'* và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng




**A.** $\pi a^3$ **B.** $2\pi a^3$ **C.** $4\pi a^3$ **D.** $3\pi a^3$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn C.**




Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$

Lại có tam giác *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*

nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa

*AC'* và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác $AIC'$ ta có $IC' = \frac{AI}{\tan\widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$

Xét tam giác CIC' ta có $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Rightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

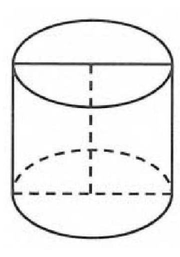
Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ *là* $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

**Bài tập 8:** Trong tất cả các khối trụ có cùng thể tích 330, xác định bán kính đáy của khối trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

**A.** $\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ **B.** $\sqrt{\frac{165}{\pi}}$ **C.** $\sqrt[3]{\frac{330}{\pi}}$ **D.** $\sqrt{\frac{330}{\pi}}$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn A.**



$V = 330 \Leftrightarrow h\pi R^2 = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi R^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của khối trụ là

$S = h.2\pi.R + 2\pi R^2$

$\Leftrightarrow S = \frac{330}{\pi R^2}.2\pi R + 2\pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{660}{R} + 2\pi R^2$

Ta xem *S* là 1 hàm số ẩn *R.* Xét $S' = -\frac{660}{R^2} + 4\pi R$.

$S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{660}{R^2} + 4\pi R = 0 \Leftrightarrow \frac{-660 + 4\pi R^3}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

Lập bảng biến thiên ta có

| R | 0 | | $\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S' | | − | 0 | + | |
| S | | ↘ | CT | ↗ | |

Bài toán hỏi về bán kính đáy nên ta xem bán kính đáy là ẩn, tính diện tích xung quanh theo bán kính đáy.

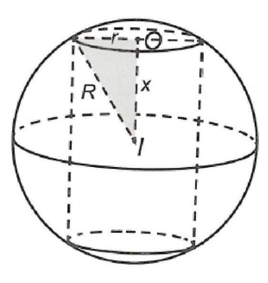
Vậy *S* đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

**Bài tập 9:** Thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp hình cầu có bán kính *R* bằng

**A.** $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ **B.** $\frac{8\pi R^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{8\pi R^3}{27}$ **D.** $\frac{8\pi R^3\sqrt{3}}{9}$

***Hướng dẫn giải***

**Chọn A.**




Gọi *X* là khoảng cách từ tâm *I* của mặt cầu đến mặt đáy của hình trụ (0 < *X* <*R).* Bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi r^2.2x = 2\pi(R^2 - x^2)x = f(x)$

$f'(x) = 2\pi R^2 - 6\pi x^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ (vì $x > 0$).

Ta có bảng biến thiên như sau

| $x$ | 0 | | $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ | | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f_{max}$ | ↘ | |

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính *R* là

$V_{max} = f\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.