

Phương trình tiếp tuyến

Đội ngũ hdmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 11 bài viết Phương trình tiếp tuyến, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 11.

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0)=k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Phương trình của tiếp tuyến với (C) tại M_0 là:

$$A. y=f'(x_0)(x-x_0).$$

$$B. y=f'(x)(x-x_0)+y_0.$$

$$C. y-y_0=f'(x_0)x.$$

$$D. y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(x_0; y_0) \in (C)$:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \text{ hoặc } y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=x^2+5$ có $f'(x)=2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$.

$$A. y=-2(x-1)+6.$$

$$B. y=2(x-1)+6.$$

$$C. y=-2(x+1)-6.$$

$$D. y=-2(x+1)+6.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$x_0=-1 \Rightarrow f(x_0)=(-1)^2+5=6$$

$$f'(-1)=-2.$$

Phương trình tiếp tuyến: $y=-2(x+1)+6.$

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

$$A. y=-4x-3.$$

$$B. y=-4x-4.$$

$$C. y=-4x-5.$$

$$D. y=-4x+5.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(1)=1; f'(x)=4x^3$, do đó $f'(-1)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-4(x+1)+1=-4x-3$.

Ví dụ 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1 có phương trình là:

$$A. y=3x-4.$$

$$B. y=3x.$$

$$C. y=3x+2.$$

$$D. y=-3x-4.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: Khi $y=-1$ thì $x^3=-1$, do đó $x=-1$.

$$f(-1)=-1; f'(x)=3x^2, \text{ do đó } f'(-1)=3.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3(x+1)-1=3x+2$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ có hệ số góc bằng 4.

$$A. y=4x-3.$$

$$B. y=4x.$$

$$C. y=4x+5.$$

$$D. y=4x-4.$$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x)=4x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3=4$, do đó $x=1; f(1)=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=4(x-1)+1=4x-3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

$$A. k=0.$$

$$B. k=1.$$

$$C. k=\frac{1}{4}.$$

$$D. k=-\frac{1}{2}.$$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' \Big|_{\frac{1}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2}{\Delta x} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

$$\text{Vậy } k=y' \Big|_{\frac{1}{2}} = 1.$$

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

$$A. y=-3x-4.$$

$$B. y=-1.$$

$$C. y=3x-2.$$

$$D. y=3x+2.$$

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k=y'(-1)=3$.

Ta có $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-1 \\ k=3 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=3(x+1) \Leftrightarrow y=3x+2$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

$$A. x+y+2=0.$$

$$B. y=x+2.$$

$$C. y=x-2.$$

$$D. y=-x+2.$$

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k=y'(-1)=-1$.

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-1$.

Ta có $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-1 \\ k=-1 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y+1=-1(x+1) \Leftrightarrow y=-x-2$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

$$A. y=8.$$

$$B. y=-12x+16.$$

$$C. y=12x-24.$$

$$D. y=12x-16.$$

Lời giải

Chọn D

Với $y_0=8 \Rightarrow x_0=2$.

Ta tính được $k=y'(2)=12$.

Ta có $\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=8 \\ k=12 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y-8=12(x-2) \Leftrightarrow y=12x-16$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

$$A. y=2x.$$

$$B. y=2.$$

$$C. y=0.$$

$$D. y=-2.$$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x_0=0; y_0=2; y'=3x^2-6x \Rightarrow k=y'(0)=0$

Ta có: $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=2 \\ k=0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=2$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y=-2$.

$$A. y=-9x+7; y=-2.$$

$$B. y=-2.$$

$$C. y=9x+7; y=-2.$$

D.

$$y=9x+7; y=2.$$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $y=x^3-3x^2+2=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$.

Với $x=-1 \rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-1)=9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7$.

Với $x=2 \rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ k=y'(-2)=0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$.

$$A. y=9x+7; y=9x-25.$$

$$B. y=9x-25.$$

$$C. y=9x-7; y=9x+25.$$

$$D. y=9x+25.$$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$

$$\text{nên có } k=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{cases}.$$

Với $x_0=-1 \rightarrow \begin{cases} y_0=-2 \\ k=9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=3 \rightarrow \begin{cases} y_0=2 \\ k=9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-25$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$.

$$A. y=45x-173; y=45x+83.$$

$$B. y=45x-173.$$

$$C. y=45x+173; y=45x-83.$$

$$D. y=45x-83.$$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$

$$\text{nên có } k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k=45 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=5 \\ x_0=-3 \end{cases}.$$

Với $x_0=5 \rightarrow \begin{cases} y_0=52 \\ k=45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x-173$.

Với $x_0=-3 \rightarrow \begin{cases} y_0=-52 \\ k=45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x+83$.

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

$$A. x+4y-1=0; x+4y+1=0.$$

$$B. x+4y-4=0; x+4y+4=0.$$

$$C. y=-\frac{1}{4}x-4; y=-\frac{1}{4}x+4.$$

$$D. y=-\frac{1}{4}x.$$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$.

• Với $x_0=2 \rightarrow y_0=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+4y-4=0.$$

• Với $x_0=-2 \rightarrow y_0=-\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y=-\frac{1}{4}(x+2)-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+4y+4=0.$$

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}$.

$$A. y=2; y=1.$$

$$B. y=-2; y=1.$$

$$C. y=-2; y=-1.$$

$$D. y=2; y=-2.$$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k(x-x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_d=(-k; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=(4; -3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d, \Delta) = \frac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-\frac{24}{7} \end{cases}$.

Với $k=-\frac{24}{7} \Rightarrow 3x_0^2-6x_0=-\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k=0 \Rightarrow 3x_0^2-6x_0=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=2 \end{cases}$.

• $x_0=0 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$.

• $x_0=2 \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$.