

Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Lê Nguyễn Minh Trung - Đội ngũ hdmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 10 bài viết Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 10.

➡ Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.
Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.
Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác.
Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

- $af(x) + b\sqrt{f(x)} = c$. Đặt $\sqrt{f(x)} = t$.
- $a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A.B} = c$ (A, B là biểu thức của x). Đặt $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A.B} = \dots$ (Bình phương t để đưa ra $\sqrt{A.B}$).

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.
Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện theo một trong những hướng sau:

- Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.
- Biến đổi liên hợp $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.
- Khi nhắm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liên hợp tạo ra nhân tử chung.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$.

Lời giải.

$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$.

Lời giải.

$\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+5 = (3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$.

Lời giải.

Phân tích: 2 vế không âm nên ta có thể bình phương được, bình phương sẽ mất dần số lượng căn đi.

$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$ (DK: $x \geq \frac{1}{2}$)
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 = 9$
 $\Leftrightarrow 3x+2+2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 9$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 7-3x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x-3) = (7-3x)^2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x^2-62x+61=0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=61 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (TMDK)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6}$.

Lời giải.

$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+3 = 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -1; x = 3$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2} = x+1$.

Lời giải.

$\sqrt{2x^2+2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$.

Lời giải.

DK: $x \geq -3$. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+10x+3 = (6-2x)^2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (tmdk)

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

Lời giải.

DK: $\frac{-3}{2} \leq x \leq 4$.
 $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{4-x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{4-x} = 3x-5$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 16(4-x) = (3x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

Phương trình có 1 nghiệm $x=3$.

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2+2x-2} = 2$.

Lời giải.

DK: $x^2+2x-2 \geq 0$.
 $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2+2x-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{x^2+2x-2} + 2$
 $\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x^2+2x-2+4+4\sqrt{x^2+2x-2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2x-2} = x+1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x-2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Phương trình có 1 nghiệm $x=1$.

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{(x+1)(x-2)} = t$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 - x - 2 = t^2 \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 2$.
 Vậy ta có phương trình:
 $2(t^2 + 2) + t = 14 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $\sqrt{(x+1)(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Phương trình có 2 nghiệm $x = -2; x = 3$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$.

Lời giải.

DK: $1 \leq x \leq 3$ Đặt $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = t$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)
 $\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{-x^2+4x-3} = \frac{t^2-2}{2}$.

Khi đó ta có phương trình:
 $t + \frac{t^2-2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$.

Khi đó ta có $\sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \Leftrightarrow -x^2+4x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
 Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} = 4$.

Lời giải.

DK: $x \geq -3$.
 Đặt $\sqrt[3]{x+7} = a; \sqrt{x+3} = b$ ($b \geq 0$)
 Ta có hệ
 $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 - b^2 = 4 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - (4 - a)^2 = 4 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - a^2 + 8a - 20 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ (a-2)(a^2 + a + 10) = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
 Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2} = 2x^2+2x-2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2+x+2}$ ($t \geq 0$) có phương trình:
 $t = 2t^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-3}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x^2+x+2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = -2$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2+2x-10$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)} = t$ ($t \geq 0$) thì $x^2 + x = t^2 + 2$ ta có phương trình
 $t = 2(t^2 + 2) - 10 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -3$

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$.

Lời giải.

DK: $-1 \leq x \leq 1$ Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$) thì $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2}$ khi đó ta có phương trình
 $t + 3\frac{t^2-2}{2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-8}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $\sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2-x-2} = 8$.

Lời giải.

DK: $x \geq 2$.
 Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = t$ ($t \geq 0$) thì $x + \sqrt{x^2-x-2} = \frac{t^2+1}{2}$ ta có
 $t + \frac{t^2+1}{2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $x + \sqrt{x^2-x-2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} = 5-x \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện).
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a; \sqrt{x+2} = b$ ($b \geq 0$) ta có hệ
 $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = 2$.
 phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$.

Lời giải.

DK: $1 \leq x \leq 3$.
 $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) + (3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)}) = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) - \sqrt{3-x}(\sqrt{x-1} - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{3-x} - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 3 \\ \sqrt{3-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải.

DK: $x \geq \frac{1}{2}$.
 $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$
 $\Leftrightarrow \frac{x+3-\sqrt{2x-1}}{x+3+\sqrt{2x-1}} = (x-4)(x+1)$
 $\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = (x-4)(x+1)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = x+1(2) \end{cases}$

Phương trình (2) vô nghiệm vì với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $VT < 0 < VP$.
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải.

Phân tích: Ta nhắm được một nghiệm của phương trình là $x = 3$ và nếu tại $x = 3$ thì $\sqrt{x-2} \geq 1$ nên nếu ta trừ nó cho 1 thì sẽ tạo được nhân tử $x - 3$

DK: $x \geq 2$.
 $\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) + x^2 - 3x = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x(x-3) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x \right) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x = 0(2) \end{cases}$

Phương trình (2) với điều kiện $x \geq 2$ thì phương trình (2) có $VT > 0$ nên (2) vô nghiệm.
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải phương trình $-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Lời giải.

$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
 Phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0$

Lời giải.

DK: $x \geq \frac{1}{2}$.
 $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2) + (\sqrt{2x-1} - 1) + x^2 - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x+1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3$.

Lời giải.

DK: $x \geq -3$
 $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3} = 3(x^3 - 1)$
 $\Leftrightarrow (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3}} = 3(x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3} = 3(x^2+x+1)(2) \end{cases}$

Thấy phương trình (2) vô nghiệm vì $VT \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq VP$.
 Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.