Hàm số liên tục trên một khoảng

Đội ngũ hdgmvietnam.org giới thiệu đến các em học sinh lớp 11 bài viết Hàm số liên tục trên một khoảng, nhằm giúp các em học tốt chương trình Toán 11.

Dạng 3. Hàm số liên tục trên một khoảng

1. Phương pháp

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên (a,b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ không liên tục tại $x=-2;\ x=-3$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;3)$.

Ví dụ 2: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{3x-1}{1-x^2}$. **B.** $y=3+\tan x$.

C. $y=\dfrac{4+x}{2+\sqrt{1+x^2}}$. **D.** $y=\dfrac{3+2x}{1+\sin x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có định lí: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên từng khoảng xác định.

Do đó: Phương án A sai vì tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Phương án B sai vì $\tan x$ chỉ xác định khi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Phương án D sai vì $1+\sin x\neq 0$, nghĩa là hàm số chỉ xác định khi $x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Phương án C đúng vì hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $(0;+\infty)$?

A. $y=\sqrt{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{\sin x+2}{x^2-1}$. **C.** $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$. **D.** $y=\sqrt{x^2-x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ là $[1;+\infty)$ suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2}{x^2-1}$ là $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$ là $(-1;+\infty)$. Suy ra y liên tục trên $(-1;+\infty)$. Mặt khác $(-1;+\infty)\supset(0;+\infty)$ nên y cũng liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-x}$ là $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. Suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ví dụ 4: Hàm số $y=\tan x.\cot x$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;\pi)$. **D.** $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Hàm số $y=\tan x.\cot x$ xác định khi $\begin{cases}x\neq k_1\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k_2\pi\end{cases};\ k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

Do đó trong bốn khoảng của đề bài thì chỉ có $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa điều kiện xác định của hàm số $y=\tan x.\cot x$. Nghĩa là nó liên tục trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{với } x\neq 0\\ 0 & \text{với } x=0\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1\neq f(0)=0$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0=0$ và $x_0=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & \text{với } x\le\sqrt{2},\ a\in\mathbb{R}\\ (2-a)x^2 & \text{với } x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 và 2. **B.** 1 và -1. **C.** -1 và 2. **D.** 1 và -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x)=2a^2=\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x)=2(2-a)=f(\sqrt{2})$

$\Rightarrow a^2=2-a\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-2\end{array}\right.$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

. TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$. (*)

Ta có $\begin{cases}f(2)=4m^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}[(1-m)x]=2(1-m)\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}m^2x^2=4m^2\end{cases}\xrightarrow{(*)}4m^2=2(1-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 2: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in[0;4]\\ 1+m & \text{khi } x\in(4;6]\end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\le m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\ge 5$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4,\ x=0,\ x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 6^-}f(x)=f(6)\\ \lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=f(4)\end{cases}$. (*)

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\\ f(0)=\sqrt{0}=0\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(1+m)=1+m\\ f(6)=1+m\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(1+m)=1+m\\ f(4)=1+m\end{cases}$;

Khi đó (*) trở thành $1+m=2\Leftrightarrow m=1<2$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liê tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$. (*)

Ta có $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x>1\\ a & \text{khi } x=1\\ 2-x & \text{khi } x<1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1\end{cases}\longrightarrow(*)$ không tỏa mãn với mọi $a\in\mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 4: Biết rằng $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ. **C.** $a>5$. **D.** $a<0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$. (*)

Ta có $\begin{cases}f(1)=a\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)(\sqrt{x}+1)\right]=4\end{cases}\longrightarrow(*)\Leftrightarrow a=4$.

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ -2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.