

Dạng 3. Hàm số liên tục trên một khoảng

1. Phương pháp

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
 Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên (a, b) và
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 2)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$ không liên tục tại $x = -2$; $x = -3$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2; 3)$.

Ví dụ 2: Hàm số nào dưới đây liên tục trên \mathbb{R} ?

- A. $y = \frac{3x-1}{1-x^2}$. B. $y = 3 + \tan x$.

- C. $y = \frac{4+x}{2+\sqrt{1+x^2}}$. D. $y = \frac{3+2x}{1+\sin x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có định lí: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên từng khoảng xác định.
 Do đó: Phương án A sai vì tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 Phương án B sai vì $\tan x$ chỉ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 Phương án D sai vì $1 + \sin x \neq 0$, nghĩa là hàm sơ chỉ xác định khi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 Phương án C đúng vì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ nên nó liên tục trên \mathbb{R} .

Ví dụ 3: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $(0; +\infty)$?

- A. $y = \sqrt{x-1}$. B. $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$. C. $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$. D. $y = \sqrt{x^2 - x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ là $[1; +\infty)$ suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$ là $(-1; +\infty)$. Suy ra y liên tục trên $(-1; +\infty)$. Mặt khác $(-1; +\infty) \supset (0; +\infty)$ nên y cũng liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x}$ là $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 4: Hàm số $y = \tan x \cdot \cot x$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; \frac{\pi}{2})$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; \pi)$. D. $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Hàm số $y = \tan x \cdot \cot x$ xác định khi $\begin{cases} x \neq k_1\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{cases}; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
 Do đó trong bốn khoảng của đề bài thì chỉ có $(0; \frac{\pi}{2})$ thỏa điều kiện xác định của hàm số
 $y = \tan x \cdot \cot x$. Nghĩa là nó liên tục trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

- A. $(0; \frac{\pi}{2})$. B. $(-\infty; \frac{\pi}{4})$. C. $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$ và $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{với } x \leq \sqrt{2} \\ (2-a)x^2 & \text{với } x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} là:

- A. 1 và 2. B. 1 và -1. C. -1 và 2. D. 1 và -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = 2a^2 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = 2(2-a) = f(\sqrt{2})$
 $\Leftrightarrow a^2 = 2 - a \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} ?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A
 . TXD: $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$; $(2; +\infty)$.
 Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2x^2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. (*)

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(1-m)x] = 2(1-m) \end{cases} \xrightarrow{(*)} 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 2: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Lời giải

Chọn A

Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0; 4)$ và $(4; 6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; 6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4, x = 0, x = 6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases}$. (*)

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases}$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (1+m) = 1+m \\ f(4) = 1+m \end{cases}$

Khi đó (*) trở thành $1+m = 2 \Leftrightarrow m = 1 < 2$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} .

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên \mathbb{R} khi và chỉ khi nó liên tục tại $x = 1$, tức là ta cần có
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2-x} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{x-2}{2-x} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{cases}$ (*) không thỏa mãn với mọi $a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 4: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

- A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$. D. $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 1]$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \end{cases} \xrightarrow{(*)} a = 4$.

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ không liên tục trên \mathbb{R} . B. $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.
 C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. D. $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-\sqrt{2-x}+1] = -2 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ liên tục tại } x = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

- A. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-2)(\sqrt{4x-3}+x)}{1-x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1-a^2x) = 1-3a^2 \end{cases} \xrightarrow{(*)} a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{a_{\min}} a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $a_{\max} = 3$. B. $a_{\max} = 0$. C. $a_{\max} = 1$. D. $a_{\max} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{3x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{(*)} a = \pm 1 \xrightarrow{a_{\max}} a_{\max} = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^2x + \frac{1}{4}) = 2a^2 - \frac{7}{4}$

Câu 8: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.
 C. $f(x)$ không liên tục trên \mathbb{R} . D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Mặt khác $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1$

Câu 9: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
 B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
 D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1, 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$; $(-1, 1)$; $(1; +\infty)$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -2 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1$.
- Ta có $\begin{cases} f(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ liên tục tại } x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0$

Câu 10: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?

- A. $x = 0$.
 B. $x = 1$.
 C. $x = 2$.
 D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Để thấy tại điểm có hoành độ $x = 1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.
 Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc \mathbb{R} . B. mọi điểm trừ $x = 0$.
 C. mọi điểm trừ $x = 1$. D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ có TXD: $D = \mathbb{R}$.
 Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$; $(0, 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ không liên tục tại } x = 0$.

Ta có $\begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ liên tục tại } x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-1) = 5$

Câu 14: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Điều kiện bài toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (m^2x + 1) = m^2 + 1 \end{cases} \xrightarrow{(*)} m^2 + 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = 2$
 $\Leftrightarrow m = \pm 1 \xrightarrow{(*)} S = 0$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$. B. mọi điểm trừ $x = 0$.
 C. mọi điểm trừ $x = 1$. D. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ có TXD: $D = \mathbb{R}$.
 Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$; $(0, 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \cos x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ liên tục tại } x = 0$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{(*)} f(x) \text{ không liên tục tại } x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1$