

Ngày thi: 06/10/2023

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (4,0 điểm). Giải phương trình $(x^2 - 10x + 21)\sqrt{x - 3} = x^3 - 11x^2 + 34x - 27$ ($x \in \mathbb{R}$).

Bài 2 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = a \\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x_n}}{(n+1)^3}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
 trong đó a là một số thực dương cho trước.

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. Tìm số thực α để dãy (y_n) xác định bởi $y_n = n^\alpha(c - x_n), \forall n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH với đường tròn (O) ; I là giao điểm của AT với BC ; J là giao điểm của AD với EF . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HC, HE . Lấy điểm P trên EF sao cho MP song song với DE , điểm Q trên BJ sao cho EQ song song với NP .

a) Chứng minh rằng ba điểm I, E, Q thẳng hàng.

b) Gọi X là giao điểm của BH với CO , Y là giao điểm của CH với BO , Z là trực tâm tam giác DEF . Chứng minh rằng OZ chia đôi đoạn XY .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, 2048\}$.

a) Chứng minh khẳng định sau: "Với mọi tập con X của tập S có số phần tử bằng 15, luôn tồn tại hai tập con khác rỗng rời nhau A, B của tập X sao cho $\sum_{i \in A} i = \sum_{j \in B} j$ ".

Khẳng định này còn đúng không khi số phần tử của tập X bằng 12?

b) Tập con Y khác rỗng của S thoả mãn điều kiện: $\forall y \in Y$ thì $15y \notin Y$. Tìm số phần tử lớn nhất có thể của tập Y .

Bài 5 (5,0 điểm). Cho n là một số nguyên lớn hơn 4 và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x + 1)^n - px^2 - px + p^2$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 6 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(xf(y) + y^{2023}) = yf(x) + (f(y))^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7 (5,0 điểm). Bộ ba số nguyên dương (a, b, p) , với p là số nguyên tố, được gọi là “tốt” nếu:

$$(a + b)(a^p + b^p) = 2^a + 2^b.$$

- Chứng minh rằng không có bộ số “tốt” nào trong trường hợp $a \neq b$ và p lẻ.
- Tìm tất cả các bộ số “tốt”.

Bài 8 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường kính AS . Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D . Tiếp tuyến tại S của đường tròn (O) cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD tại T . Gọi P là điểm đối xứng của D qua đường thẳng TK .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tiếp xúc với đường tròn (K) .
- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , Δ là đường thẳng vuông góc với AD tại D , Δ' là tiếp tuyến song song với BC của đường tròn (K) (Δ' nằm cùng phía với D so với BC). Trong trường hợp Δ cắt Δ' , gọi M là giao điểm của hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BC, OI đồng quy.

—————HẾT—————