

Đề chính thức

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1(6,0 điểm).

a) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$3$	$+\infty$			
$y'$		$+$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Tìm các điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(|2x+1|-4)$ .

b) Cho hàm số  $y = f(x) = 2mx^3 + 3(m^2 - 7m + 2)x^2 - 32(x+1)\sqrt{x+1} - 6(3m^2 - 12m - 10)x$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

Câu 2(5,0 điểm).

a) Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = 1, SB = 2, SC = 3, \widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 120^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$ .

Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$  và khoảng cách giữa các đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .

b) Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tam giác  $AB'A'$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(AB'B)$  và  $(AB'C')$ . Biết  $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$  và  $AA' + B'C' = 6$ . Ký hiệu

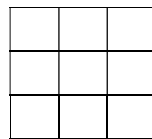
$V_{ABC.A'B'C'}$  là thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Chứng minh  $V_{ABC.A'B'C'} \leq 24$ .

Câu 3(5,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình

$$2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m\sqrt{x^2 + x + 1} + 2m = 2x^2 + m\sqrt{x^2 - x + 1} + 7 \text{ có nghiệm thực.}$$

b) Đặt ngẫu nhiên hết 9 viên bi được đánh số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 vào 9 ô vuông của lưới ô vuông  $3 \times 3$  (hình vẽ lưới ô vuông dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một viên bi. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.



Câu 4(2,0 điểm).

Cho tứ diện  $ABCD$  cố định,  $P$  là điểm thay đổi trong tam giác  $BCD$ . Gọi  $M, N, E$  thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên các mặt phẳng  $(ACD), (ADB), (ABC)$ . Xác định vị trí của  $P$  để thể tích tứ diện  $PMNE$  đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5(2,0 điểm).

Cho các số thực  $a, b, c$  thay đổi thỏa mãn các điều kiện  $a \geq b \geq c$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ .

....Hết....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

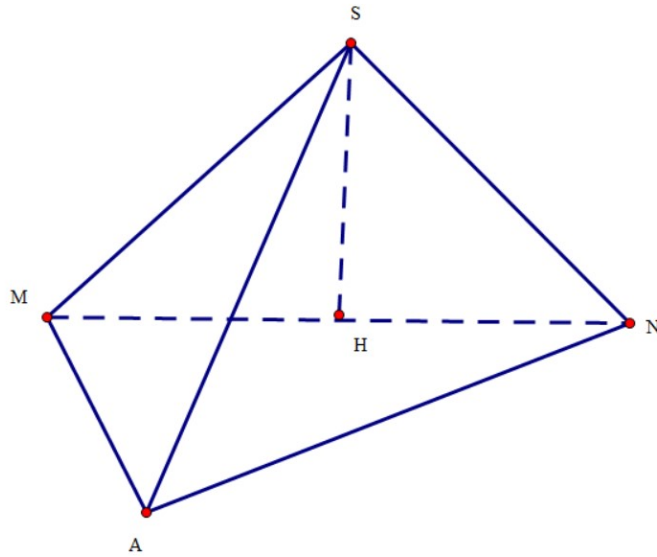
HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b> <b>(6,0đ)</b>	<b>a) (3,0 điểm)</b>	
	Ta có $g'(x) = ( 2x+1 -4)' \cdot f'( 2x+1 -4) = \frac{4x+2}{ 2x+1 } \cdot f'( 2x+1 -4)$	<b>1,0</b>
	Dựa vào dấu của đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ ta có	
	Điểm cực trị của $g(x)$ phải thỏa mãn $\begin{cases}  2x+1 -4=2 \\  2x+1 -4=3 \Leftrightarrow \\ 2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \\ x = 3 \\ x = -4 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	<b>1,0</b>
	Vì $g'(x)$ đổi dấu qua các điểm $-4; -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 3$ nên $g(x)$ có các điểm cực trị là $x = -4; x = -\frac{7}{2}; x = -\frac{1}{2}; x = \frac{5}{2}; x = 3$ .	<b>1,0</b>
<b>b) (3,0 điểm)</b>		
Ta có, hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ . $f'(x) = 6mx^2 + 6(m^2 - 7m + 2)x - 48\sqrt{x+1} - 6(3m^2 - 12m - 10), \forall x \in (-1; +\infty)$ . Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ . khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$ . Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(-1; +\infty)$ . Do $f'(x) = 6mx^2 + 6(m^2 - 7m + 2)x - 48\sqrt{x+1} - 6(3m^2 - 12m - 10), \forall x \in (-1; +\infty)$	<b>0,5</b>	
$f'(x) = 6 \left[ mx^2 + (m^2 - 7m + 2)x - 8\sqrt{x+1} - (3m^2 - 12m - 10) \right], \forall x \in (-1; +\infty)$ $= 6(x-3) \left[ m^2 + m(x-4) + \frac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}} \right], \forall x \in (-1; +\infty)$ Đặt $g(x) = m^2 + m(x-4) + \frac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}}, \forall x \in (-1; +\infty)$	<b>1,0</b>	
$f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$ thì $g(x) = m^2 + m(x-4) + \frac{2(x-3)}{x+5+4\sqrt{x+1}}$ phải có nghiệm $x = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ .	<b>0,5</b>	
Thử lại. ta thấy $m = 0$ (tm), $m = 1$ (tm). Vậy $m = 0, m = 1$ .	<b>1,0</b>	

2  
(5,0đ)

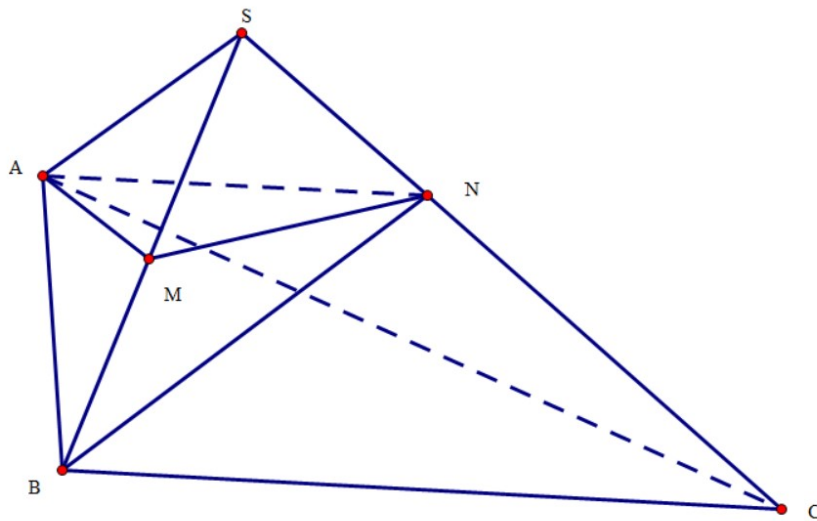
a) (3,0 điểm)

Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy M, N sao cho SM = SN=1.



Tính được  $V_{SAMN} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

1,0



Mà  $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

0,5

Chứng minh được:  $V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot BC \cdot d(SA, BC) \sin \varphi$ , với  $\varphi$  là góc giữa SA và BC.

0,5

$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \widehat{BSC} = 19 \Rightarrow BC = \sqrt{19}$ .

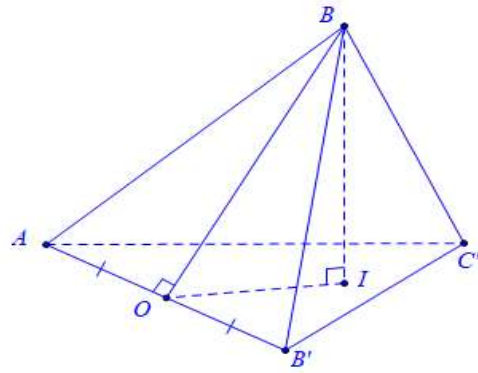
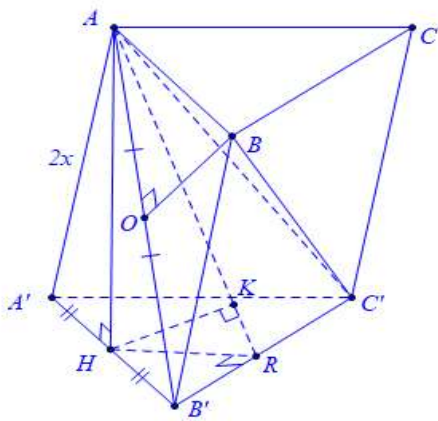
Mà  $\cos \varphi = \frac{|\overline{SABC}|}{|\overline{SA} \cdot \overline{BC}|} = \frac{|\overline{SA}(\overline{SC} - \overline{SB})|}{SA \cdot BC} = \frac{1}{\sqrt{19}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

Suy ra

$V_{SABC} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{19} \cdot d(SA, BC) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{19} \cdot d(SA, BC) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}} \Rightarrow d(SA, BC) = 1$ .

1,0

b)(2,0 điểm) :



0,5

Đặt  $AA' = 2x, B'C' = y$  ( $x > 0, y > 0$ ). Ta có  $2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x$  ( $0 < x < 3$ ).

Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác  $AB'A'$ . Khi đó  $AH$  là đường cao của lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Ta có  $AB' = (BAB') \cap (C'AB')$ .

Gọi  $I, O$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $B$  trên mặt phẳng  $(AB'C')$  và đường thẳng  $AB'$ . Khi đó:  $AB' \perp (BOI) \Rightarrow AB' \perp OI$  suy ra góc  $\varphi$  là giữa hai mặt phẳng  $(AB'B)$  và

$(AB'C')$  là góc  $\widehat{BOI}$ . Do tam giác  $AB'A'$  đều nên ta có  $BO = AH = \frac{\sqrt{3}}{2} 2x = \sqrt{3}x$ .

Ta có  $BI = d(B, (AB'C')) = d(A', (AB'C')) = 2d(H, (AB'C'))$ .

Kẻ  $HR \perp B'C', HK \perp AR \Rightarrow d(H, (AB'C')) = HK$ .

Ta có:  $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HR^2} \Rightarrow HK = \frac{AH \cdot HR}{\sqrt{AH^2 + HR^2}} = \frac{x\sqrt{3} \cdot HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}}$ .

0,5

Từ đó ta có:  $BI = \frac{2x\sqrt{3} \cdot HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}}$ .

Ta có  $\sin \varphi = \frac{BI}{BO} = \frac{2HR}{\sqrt{3x^2 + HR^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow HR = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(A', B'C') = 2HR = x\sqrt{3}$ .

0,5

Suy ra

$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot d(A', B'C') \cdot B'C' = \frac{1}{2} x\sqrt{3} \cdot (6 - 2x) \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AH \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \frac{3}{2} x^2 \cdot (6 - 2x)$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} x \cdot x \cdot (6 - 2x) \leq \frac{3}{2} \left( \frac{x + x + 6 - 2x}{3} \right)^3 = 12 < 24$ . Điều phải chứng minh

0,5

3  
(5,0d)

a) (3,0 điểm)

Ta có  $2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m\sqrt{x^2 + x + 1} + 2m = 2x^2 + m\sqrt{x^2 - x + 1} + 7$   
 $\Leftrightarrow m(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} + 2) = 2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 7$

1,5

$\Leftrightarrow m = \frac{2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 7}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} + 2}$  (1)

Đặt  $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ . Chứng minh được tập giá trị của  $t$  là  $(-1; 1)$ .

$pt(1) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5}{t + 2}$  (2)

1,5

Hàm số  $f(t)$  liên tục và nghịch biến trên  $(-1;1)$  và  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(t) = 6$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(t) = 2$

$YCBT \Leftrightarrow 2 < m < 6$

**b) (2,0 điểm)**

Vì tổng các số trên mỗi hàng và tổng các các số trên mỗi cột đều là các số lẻ nên trên mỗi hàng và trên mỗi cột đều có ba số lẻ hoặc hai số chẵn và một số lẻ.  
 Vì chỉ có 5 số lẻ: 1;3;5;7;9 và có 4 số chẵn: 2;4;6;8 nên có đúng một hàng được đặt toàn số lẻ và hai hàng còn lại thì mỗi hàng có hai số chẵn và một số lẻ; có đúng một cột được đặt toàn số lẻ và hai cột còn lại thì mỗi cột có hai số chẵn và một số lẻ;  
 Chọn một hàng có 3 cách.  
 Chọn 3 số lẻ trong 5 số lẻ: 1;3;5;7;9 rồi sắp xếp vào 3 ô vuông của hàng vừa chọn có  $A_5^3$  cách.

lẻ	lẻ	lẻ
chẵn	lẻ	chẵn
chẵn	lẻ	chẵn

1,0

Chọn một cột có 3 cách.  
 Có 3 ô vuông trong cột vừa chọn gồm một ô vuông đã được đặt số lẻ và hai ô vuông trống.  
 Sắp xếp 2 số lẻ còn lại vào 2 ô vuông trống đó có 2! cách.  
 Sắp xếp 4 số chẵn: 2;4;6;8 vào 4 ô vuông trống còn lại có 4! cách.  
 Vậy có  $3 \cdot A_5^3 \cdot 3 \cdot 2! \cdot 4!$  cách đặt các viên bi đã cho để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.  
 Đặt ngẫu nhiên hết các viên bi đánh số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 vào 9 ô vuông có 9! cách.  
 Xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ là:  $\frac{3 \cdot A_5^3 \cdot 3 \cdot 2! \cdot 4!}{9!} = \frac{1}{14}$

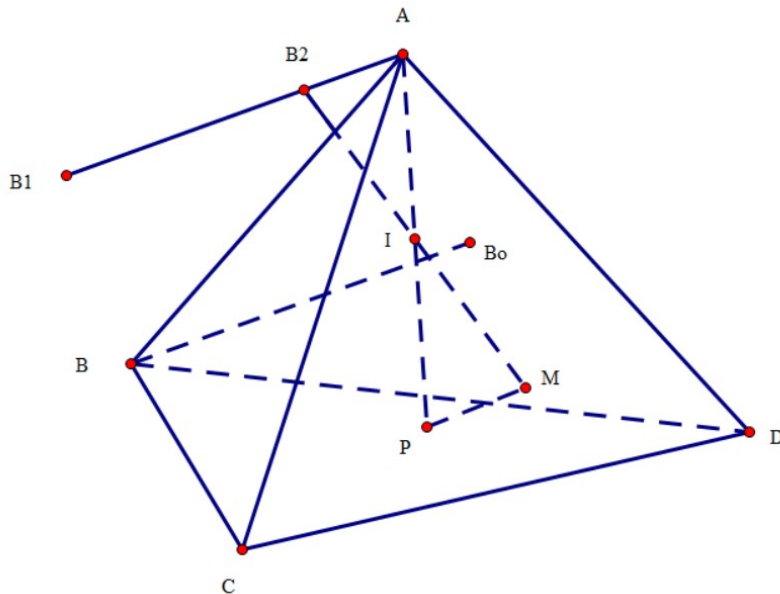
1,0

**4 (2,0đ)**

Gọi  $B_0, C_0, D_0$  thứ tự là hình chiếu của B lên (ACD), C lên (ADB), D lên (ABC).

Chứng minh được  $\frac{PM}{BB_0} + \frac{PN}{CC_0} + \frac{PN}{DD_0} = 1$

0,5



1,0

	<p>Gọi <math>B_1, C_1, D_1</math> là các điểm thỏa mãn <math>\overline{AB_1} = \overline{B_oB}, \overline{AC_1} = \overline{C_oC}, \overline{AD_1} = \overline{D_oD}</math>. Ta có <math>B_1, C_1, D_1</math> cố định và <math>\frac{PM}{AB_1} + \frac{PN}{AC_1} + \frac{PN}{AD_1} = 1</math>.</p> <p>Gọi I là trung điểm của AP. Xét phép đối xứng tâm I biến P thành A, biến các điểm M, N, E thứ tự thành <math>B_2, C_2, D_2</math> thứ tự thuộc <math>AB_1, AC_1, AD_1</math>. Khi đó <math>V_{PMNE} = V_{AB_2C_2D_2}</math> và <math>\frac{AB_2}{AB_1} + \frac{AC_2}{AC_1} + \frac{AD_2}{AD_1} = 1</math></p>	
	<p><math>\frac{V_{AB_2C_2D_2}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB_2}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{AC_1} \cdot \frac{AD_2}{AD_1} \leq \frac{1}{27} \left( \frac{AB_2}{AB_1} + \frac{AC_2}{AC_1} + \frac{AD_2}{AD_1} \right)^3 \Rightarrow V_{AB_2C_2D_2} \leq \frac{V_{AB_1C_1D_1}}{27}</math> (không đổi).</p> <p>Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là trọng tâm tam giác BCD.</p> <p>Vậy thể tích tứ diện PMNE đạt giá trị lớn nhất khi P là trọng tâm tam giác BCD.</p>	0,5
5 (2,0đ)	<p>Ta chứng minh <math>P = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4</math>  <math>\Leftrightarrow -P = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4</math> (*).</p> <p>Nếu <math>ab+bc+ca &lt; 0</math> thì <math>-P \leq 0</math> suy ra BĐT được chứng minh.</p>	0,5
	<p>Nếu <math>ab+bc+ca \geq 0</math>, đặt <math>ab+bc+ca = x \geq 0</math> ta có :</p> <p><math>(a-b)(b-c) \leq \left( \frac{a-b+b-c}{2} \right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^3}{4}</math> (1)</p> <p>Ta có <math>4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)</math>  <math>= 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 = 2(a-c)^2 + [(a-b)+(b-c)]^2</math>  <math>= 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2</math></p> <p>Suy ra <math>4(5-x) \geq 3(a-c)^2</math>, từ đây ta có <math>x \leq 5</math> và <math>a-c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)}</math> (2).</p> <p>Từ (1),(2) suy ra <math>-P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[ \frac{4}{3}(5-x) \right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}</math></p>	0,5
	<p>Lại có <math>f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}</math> hàm số liên tục trên đoạn <math>[0;5]</math>.</p> <p><math>f'(x) = \sqrt{5-x}(5-\frac{5}{2}x)</math>; <math>f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5; x = 2</math>.</p> <p>Ta có <math>f(2) = 6\sqrt{3}, f(0) = f(5) = 0</math></p>	0,5
	<p>Vậy <math>\underset{x \in [0;5]}{Max} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}</math>.</p> <p>nên suy ra <math>-P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow -P \leq 4 \Rightarrow P \geq -4</math>. Vậy (*) được chứng minh.</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi <math>a = 2; b = 1; c = 0</math>.</p> <p>Do đó <math>MinP = -4</math> khi <math>a = 2; b = 1; c = 0</math></p>	0,5

--- Hết ---

**Ghi chú:** Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa