SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TIỀN GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
DỰ THI CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2022-2023

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi thứ nhất: **04/10/2022**

(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

Bài 1 (*5,0 điểm*)

Cho dãy số thực $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n},$$

với mọi số nguyên dương m,n. Chứng minh rằng (x_n) là một cấp số cộng.

Bài 2 (*5,0 điểm*).

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$. Chứng minh rằng

$$2(ab+bc+ca)+4\min(a^2,b^2,c^2)\geq a^2+b^2+c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3 (*5,0 điểm*).

Xét ABC là tam giác không cân có độ dài các cạnh là các số tự nhiên. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm BC và CA; G là trọng tâm tam giác ABC. Giả sử bốn điểm D,C,E,G cùng nằm trên một đường tròn. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

Bài 4 (*5,0 điểm*).

Tính số phần tử của tập hợp: $X=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{N}^4 \mid 0\leq x_1+x_2\leq x_3\leq x_4\leq 2022\right\}$.

-- HẾT --

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TIỀN GIANG	KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2022-2023
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN** Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi thứ hai: **05/10/2022** *(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)*

Bài 5 (*6,0 điểm*).

a) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x)+f(y)=f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

b) Tìm tất cả các cặp hàm số $f,g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x)+f(y)=g(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Bài 6 (*7,0 điểm*).

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau ở S. Gọi M là trung điểm BC. EM cắt SC tại I, FM cắt SB tại J.

a) Chứng minh rằng các điểm I, S, M, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm thứ hai là T. Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng S, K, T thẳng hàng.

Bài 7 (*7,0 điểm*).

a) Cho p là số nguyên tố có dạng $4k+1\ (k\in\mathbb{N})$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho a^2+1 chia hết cho p.

b) Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y, z, ω, với $0<\omega<p$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2-\omega p=0$.

------------------------------ HẾT ------------------------------